LA PROPORTIONNALITÉ

Problèmes de proportionnalité = problèmes de **proportion simple sans présence de l'unité**

Pour résoudre : regrouper les données dans un tableau de 4 nombres dont 3 connus (2 nombres correspondent à une grandeur, les 2 autres à une autre grandeur)

Problème de proportion simple sans présence de l'unité
(problème de proportionnalité, dit de "quatrième proportionnelle")

"On dispose de sacs de billes tous identiques. On sait que, dans 3 sacs, il y a 15 billes. Combien de billes y a-t-il dans 12 sacs ?"

Schématisation :

Nb sacs	3	12
Nb billes	15	?

Solution possible :
12/3 = 4 --> Il y a 4 fois plus de sacs
15 x 4 = 60 --> Il y a 4 fois plus de billes, donc 60 billes

Rmrq : dans les problèmes de proportionnalité, la **solution ne peut pas être trouvée en un seul calcul, il en faut au moins 2**

Problèmes de proportionnalité travaillés qu'**à partir du CM1**, et les élèves sont souvent confrontés aux problèmes de **"quatrième proportionnelle"**

Ils doivent être capables de mettre en œuvre une procédure de résolution fondée sur l'utilisation :
- du **coefficient de proportionnalité**
- de la **propriété multiplicative de linéarité**
- de la **propriété additive de linéarité**

D'autres types de problèmes de proportionnalité peuvent être vus à l'école, à partir du CM2, mais de façon "marginale" :
- les **problèmes de proportionnalité simple composée**
- les **problèmes de comparaison de proportions**
- les **problèmes de proportionnalité double**

Problème de proportion simple composée
(problèmes dans lesquels la proportionnalité intervient 2 fois de suite (entre 3 grandeurs différentes)

"Avec 6 tonnes de blé, on fabrique 4 tonnes de farine ; avec 800g de farine, on fabrique 1,2kg de pain. Quelle masse de blé doit-on prévoir pour fabriquer 3 600 tonnes de pain ?"

Il y a proportionnalité (simple) entre la masse de blé et la masse de farine, puis entre la masse de farine et la masse de pain. On peut se ramener à un problème de proportionnalité entre la masse de blé et la masse de pain.

Problèmes de comparaison de proportions
(problèmes dans lesquels il faut comparer 2 rapports entre les grandeurs du problème)

"On met 2 sucres dans 3 verres d'eau pour obtenir le liquide A : on met 3 sucres dans 4 verres d'eau pour obtenir le liquide B. Quel liquide est le plus sucré ?"

La méthode de résolution de ce type de problème consiste à comparer les proportions en se ramenant à un élément commun : un multiple ou un sous-multiple des nombres correspondant à l'une des grandeurs ; par exemple dans le problème des liquides sucrés, on peut se ramener à 12 verres d'eau pour chacun des 2 liquides

Liquide A

3 verres d'eau --> 2 sucres

x 4   x 4

12 verres d'eau   8 sucres

Liquide B

4 verres d'eau --> 3 sucres

x 3   x 3

12 verres d'eau   9 sucres

On constate ensuite que pour 12 verres d'eau dans chaque liquide, on a 8 sucres dans le liquide 1 et 9 sucres dans le liquide B ; le liquide B est le plus sucré.

__Remarque__ : On peut également se ramener à 1 verre dans chacun des liquides et comparer les fractions 2/3 et 3/4, mais ce n'est pas cette méthode qu'on choisit avec les élèves

Problèmes de proportionnalité double
(problèmes dans lesquels l'une des grandeurs dépend de 2 grandeurs de façon proportionnelle)

"Pour un séjour à la montagne de 8 jours à 5 personnes, le forfait de ski s'élève à 2 560€. Combien paiera-t-on pour les forfaits de ski d'un groupe de 15 personnes pendant 4 jours ?"

Dans ce problème, on suppose que le prix est proportionnel au nombre de jours, et également au nombre de personnes. On peut représenter ce type de problème sous la forme d'un tableau à double entrées :

		Nombre de jours	
		8	4
Nb personnes	5	2 560€	1 280€
	15	/ 2	?

x 3

M

MÉTHODES DE RÉSOLUTION DES PROBLÈMES DE PROPORTIONNALITÉ

I Utilisation de la propriété multiplicative de linéarité

C'est déterminer quel coefficient multiplicatif sans unité, permet de passer d'un nombre à l'autre de la première grandeur (en faisant une comparaison multiplicative : "n fois plus" ou "n fois moins") et appliquer ce coefficient multiplicatif au nombre connu de la seconde grandeur pour trouver le nombre recherché

Cette procédure est accessible dès le CM1, étant donné que la comparaison multiplicative se fait sur une même grandeur (en multipliant par un nombre sans unité), puis s'applique à l'autre grandeur

On dispose de sacs de billes tous identiques. On sait que, dans 3 sacs, il y a 15 billes. Combien de billes y a-t-il dans 12 sacs ?"

Schématisation :

x 4

Nb sacs	3	12
Nb billes	15	?

x 4

En divisant 12 sacs par 3 sacs, on trouve le coeff multiplicatif 4 (sans unité) ('il y a 4 fois plus de sacs"), que l'on applique ensuite au nombre connu de billes ("il y a 4 fois plus de billes") : 15 billes x 4 = 60 billes

Schématisation générale :

1ère grandeur	a	c
2ème grandeur	b	?

x c/a

MA maîtresse

2 Utilisation du passage par l'unité

Consiste à **calculer la valeur unitaire puis à l'utiliser pour calculer le nombre à trouver**. Elle repose sur l'utilisation à 2 reprises de la propriété multiplicative de linéarité

Également utilisable par les **CM1** mais plus compliquée que la précédente

"On dispose de sacs de billets tous identiques. On sait que, dans 3 sacs, il y a 15 billes. Combien de billes y a-t-il dans 12 sacs ?"

Schématisation :

: 3 x 12

Nb sacs	3	1	12
Nb billes	15	5	?

: 3 x 12

Schématisation générale :

1ère grandeur	a	1	c
2ème grandeur	b	b/a	?

: a x c

3 Utilisation de la propriété additive de linéarité

C'est **constater une relation additive entre 3 nombres de la première grandeur et appliquer cette relation additive aux 2 nombres connus de la seconde grandeur pour trouver le 3ème nombre recherché**

Cette procédure est utilisable par les **CM1**, mais il faut qu'ils soient **capables de percevoir des relations additives entre 3 nombres d'une même grandeur et l'appliquer aux nombres correspondants de la seconde grandeur**

"On dispose de sacs de billes tous identiques. On sait que, dans 3 sacs, il y a 15 billes et que dans 7 sacs, il y a 35 billes. Combien de billes y a-t-il dans 10 sacs?"

Schématisation :

Nb sacs	3	7	10
Nb billes	15	35	?

On constate qu'en ajoutant 3 sacs et 7 sacs, on obtient 10 sacs ; donc en ajoutant 15 billes et 35 billes, on obtiendra le nombre de billes contenues dans 10 sacs

3 sacs + 7 sacs = 10 sacs, donc 15 billes + 35 billes = 50 billes

Il y a 50 billes dans les 10 sacs

DIFFICULTÉS DES ÉLÈVES

Si les nombres correspondant à la première grandeur ne sont que 2, les élèves peuvent être amenés à créer eux-mêmes un 3ème nombre pour cette première grandeur pour ensuite pouvoir utiliser la propriété additive de linéarité

"On dispose de sacs de billes tous identiques. Dans 8 sacs, il a 40 billes. Combien de billes y a-t-il dans 12 sacs ?"

Les élèves pourraient calculer le nombre de billes contenues dans 4 sacs, puis ajouter les billes contenues dans 8 sacs et dans 4 sacs pour avoir le nombre de billes contenues dans 12 sacs

Un élève pourrait ne pas savoir par combien multiplier 8 sacs pour obtenir 12 sacs. En revanche, il verrait que 12 sacs, c'est 8 sacs et la moitié de 8 sacs, donc calculer le nombre de billes contenues dans 4 sacs, 40 billes : 2 = 20 billes

Puis ajouter les nombres de billes obtenus, 40 billes + 20 billes = 60 billes

Il y a donc 60 billes dans les 12 sacs

3 Utilisation du coeff de proportionnalité

C'est déterminer quel coeff multiplicatif (ayant une unité) permet de passer d'une grandeur à l'autre et l'utiliser pour déterminer le nombre recherché

Cette procédure relève davantage du CM2 que du CM1, étant donné qu'il faut **multiplier un nombre de la première grandeur par un nombre ayant une unité pour obtenir un nombre de la seconde grandeur**

"On dispose de sacs de billes tous identiques. On sait que, dans 3 sacs, il y a 15 billes. Combien de billes y a-t-il dans 12 sacs ?"

Schématisation :

Nb sacs	3	12
Nb billes	15	?

x 5 billes/sac

En divisant 15 billes par 3 sacs, on obtient le coeff de proportionnalité 5 billes/sac, que l'on applique ensuite au nouveau nombre de sacs (12 sacs) :

12 sacs x 5 billes/sacs = 60 billes

Schématisation générale :

Nb sacs	a	c
Nb billes	b	?

x b/a unité 2nd grandeur/unité 1ère grandeur

Pour pas confondre utilisation du coeff de proportionnalité et mise en œuvre de la propriété multiplicative de linéarité : **voir si le coeff multiplicatif a une unité** (coeff de proportionnalité) **ou non** (propriété multiplicative de linéarité)

4 Autres méthodes

Au cycle 4, d'autres procédures de résolution de problèmes de "quatrième proportionnelle" sont enseignés :

- produit en croix
- rapports égaux
- règle de trois
- représentations graphiques
- usage des fonctions linéaires

DIFFICULTÉS DES ÉLÈVES POUR RÉSOUDRE DES PROBLÈMES DE PROPORTIONNALITÉ

1 Savoir si le problème rencontré relève de la proportionnalité ou non

Il auront à s'appuyer sur leurs connaissances sociales pour le déterminer

2 Être capable de mettre en œuvre une procédure de résolution

Plusieurs procédures de résolution existent pour résoudre un problème de proportionnalité, mais toutes ne permettent pas forcément d'aboutir selon les nombres en jeu

3 Un modèle additif erroné qui est prégnant chez les élèves

Par exemple, si on demande aux élèves d'agrandir plusieurs segments de longueur 4cm, 10cm et 14cm de telle façon que le segment qui mesurait 4cm mesure 6 cm une fois agrandi, certains estimeront que "pour passer de 4 à 6 cm on ajoute 2cm" et ajouteront également 2 cm aux longueurs des 2 autres segments, en utilisant des relations additives qui ne conviennent pas dans ce cas de figures

Certains problèmes peuvent avoir une validation des réponses par le matériel ou non

Exemple : une recette de cuisine à adapter en fonction du nombre de convives
"Pour réaliser un gâteau pour 4 personnes, il faut 4 œufs, 40 cl de lait, 600g de farine, 100gr de sucre et 2 sachets de levure
Quelle quantité de chaque ingrédient faut-il pour réaliser ce même gâteau pour 6 personnes

Si tous les élèves indiquent que pour passer de 4 à 6 personnes on ajoute 2 et qu'ils ajoutent 2 à tous les ingrédients, comment leur prouver que ce n'est pas la bonne solution? Il est donc souhaitable de connaitre des situations de proportionnalité qui permettent d'expliquer par le calcul des faits constatés réellement par le matériel, ou de vérifier par le matériel des prévisions effectuées grâce aux calculs pour confirmer ou infirmer telle ou telle procédure

<u>3 problèmes permettent une validation par "le milieu" (matériel) :</u>

- La hauteur d'eau dans 2 récipients différents par leur forme
- Les longueurs de bandes de papier
- Agrandissement de figures géométriques